Menores 1 « ¿Desigualdad BMY aritmética? » ①

I. Motivación

- ABC, conj. Szpiro
- BMY geométrico y versión relativa.

→ <u>Conj ABC</u>: $\exists\, c_1, c_2 > 0$ tal que para cualquier $a, b, c \in \mathbb{Z}$ con $\mathrm{mcd}(a,b,c) = 1$ y $a + b = c$, ~~ental~~ que

$$\max\{|a|, |b|, |c|\} \leq c_1 \,\mathrm{rad}(abc)^{c_2}$$

donde $\mathrm{rad}(N) = \prod_{\substack{p \mid N \\ \text{primo}}} p$

Versión fuerte: $c_2 = 1 + \varepsilon$, $c_1 = c_1(\varepsilon)$.

Estado del arte: Cotas exponenciales en $\mathrm{rad}(abc)$.

→ $E/_{\mathbb{Q}}$: $y^2 = \underbrace{x^3 - 27ax - 54b}_{\text{sin raíces dobles}}$, $a, b \in \mathbb{Q}$ curva elíptica.

discriminante $\Delta = a^3 - b^2 \neq 0$.

→ Discriminante minimal $\Delta_{\min E} = \prod_{p \text{ primo}} p^{f_p}$ tal que

Dada una ec. de Weierstrass para $E/_{\mathbb{Q}_p}$ con coef. en $\mathbb{Z}_p$ le calculamos su discriminante $\tilde{\Delta} \in \mathbb{Z}_p$ y $v_p(\tilde{\Delta})$ es el mayor $n \geq 0$ tq $\tilde{\Delta}/p^n \in \mathbb{Z}_p$

Def.- $f_p = \min\{ v_p(\tilde{\Delta})$ recorriendo ecuac. de Weie $\underset{\mathbb{Q}_p}{\cong}$ a la inicial$\}$
[$f_p = 0$ salvo un número finito de p's].

$f_p > 0 \iff E \bmod p$ no es curva elíptica ($\iff$ no es lisa)

E tiene mala red si $f_p > 0$
E " buena " si $f_p = 0$

②

Conductor: $N_E = \prod_{p \text{ mala red}} p^{e_p}$, $e_p = \begin{cases} 1 & \text{si } E \bmod p \text{ es } \alpha \\ 2 & \text{si } E \bmod p \text{ es } \prec \\ \geq 2 & \text{si } p \in \{2,3\} \text{ y } \prec \end{cases}$

(red. multiplicativa)

y $p \neq 2,3$ (red aditiva)

Conjetura de Szpiro [antes de ABC]: $\exists\, c_1, c_2 > 0$ tal que para toda $E/\mathbb{Q}$ se cumple

$$\Delta_{min,E} \leq c_1 N_E^{c_2}$$

Versión fuerte: $c_2 = 6+\varepsilon$, $c_1 = c_1(\varepsilon)$.

Szpiro $\Rightarrow$ abc: Dados a,b,c con $mcd(a,b,c)=1$ y $a+b=c$,
$E: y^2 = x(x+a)(x-b)$ (Frey). Suponer $16 \mid a$ y $b \equiv -1\ (4)$.
Para E sí hay ecuación minimal global:

$$y^2 + xy = x^3 + \left(\frac{a-b-1}{4}\right)x^2 - \frac{ab}{16}x \qquad \Delta_{min,E} = \frac{a^2b^2c^2}{2^8}$$

$N_E = \prod_{p \mid abc} p^{e_p}$ $\quad e_p \leq 2$ $\Rightarrow$ Conj Szpiro: $\frac{a^2b^2c^2}{2^8} \leq c_1 \left(\prod_{p\mid abc} p^{e_p}\right)^{c_2} \leq c_1 \, rad(abc)^{\tilde{c}_2}$

$\Rightarrow \max\{|a|,|b|,|c|\} \leq |abc| \leq \tilde{c}_1 \, rad(abc)^{\tilde{c}_2}$.

II. BMY geométrico.

X = sup. alg. compleja suave proy. $\quad Pic(X)$ = Clases de isom de haces invertibles en X

L_1, L_2 haces inv $\Rightarrow L_1 \otimes L_2$ lo es $\Rightarrow Pic(X)$ grupo.

$Cl(X)$ = divisores/equiv. ~~racional~~ lineal $\qquad Cl(X) \xrightarrow{\sim} Pic(X)$, $D \mapsto \mathcal{O}_X(D)$.

Forma de intersección: $C, C' \subset X$ curvas irred. dist, $x \in C \cap C'$

$m_x(C \cap C') = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_x/(f,g)$

Sea f = ec local para C y g = ec. local para C'

$$C \cdot C' = \sum_{x \in C\cap C'} m_x(C \cap C') \in \mathbb{N}.$$

$\forall$ curva $C \subset X$ irred, $\exists f \in \mathbb{C}(X)$ tq $\#(C + \operatorname{div} f \cap C) < \infty$.
Así la definición se extiende a $Cl(X)$ y así a $\operatorname{Pic}(X)$.
$\therefore$ forma bilineal $\operatorname{Pic} X \times \operatorname{Pic} X \longrightarrow \mathbb{Z}$.

Ejo 1: $X = \mathbb{P}^2 \supset C$ irred, $C \sim dL$, $d \in \mathbb{Z}$, L recta $\operatorname{Pic}(\mathbb{P}^2) \cong \mathbb{Z}$.
Ejo 1.- $X = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, $\operatorname{Pic}(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1) \simeq \mathbb{Z}^2$

Hay clase especial $c_1(X) \in \operatorname{Pic}(X)$, clase canónica: 1ra clase de Chern.
La segunda clase de Chern $c_2(X)$ es la caract. de Euler topológica.

TEOREMA (BMY, 77): Si X es suave, proy, no reglada $\Rightarrow c_1^2(X) \leq 3c_2(X)$.
[Caso difícil es X de tipo general].
[$c_1^2 = 3c_2 \Rightarrow X$ es el cociente de una bola].

Obs.- Se sabe que BMY no vale en char $p > 0$: c_1^2/c_2 no es acotado.

« Parshin dice que: Si trabajamos sobre $\mathbb{F}_q$, $q = p^n$ vale una versión de BMY. »

Versión relativa ($\mathbb{C}$): B = curva suave de género $g(B)$ y $f: X \to B$, X superficie. Supondremos f es semi-estable
- todas las fibras tienen a lo más singularidades que son nodos.
- Toda comp. $\mathbb{P}^1$ en fibra contiene al menos 2 pts sing.
- fibras reducidas

~~[illegible]~~ Entonces $\omega_{X/B} = \omega_X \otimes (f^*\omega_B)^{-1}$ el haz dualizante relativo $\omega_X = c_1(X)$.

$$\Rightarrow c_1^2(X) = \omega_{X/B}^2 + 2(2g-2)(2g(B)-2) \qquad g = \text{género fibra gen.}$$
$$c_2(X) = \sum_{b \in B} \delta_b + (2g-2)(2g(B)-2)$$
$$\delta_b = \#\text{ puntos sing. en } f^{-1}(b).$$

- BMY relativo: $\omega_{X/B}^2 \leq (2g-2)(2g(B)-2) + 3\sum_{b \in B} \delta_b$. [mirar otras superf.]

Menores 2 «Teoría de Arakelov» (Sumaibol bit)

→ $f \in \mathbb{Q}^*$; $\prod_{v \in \Omega_{\mathbb{Q}}} |f|_v = 1$, $\Omega_{\mathbb{Q}} = \{\text{lugares de } \mathbb{Q}\} = \{\text{primos}\} \cup \{\infty\} = \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$.

Si $f \in \mathbb{N}$, $f = \prod_{i=1}^{n} p_i^{e_i}$ $|f|_v = \begin{cases} 1 & \text{si } v \notin \{p_1, \dots, p_n\} \cup \{\infty\} \\ \left(\frac{1}{p_i}\right)^{e_i} & \text{si } v = p_i \\ |f| & \text{si } v = \infty \end{cases}$

$X = \operatorname{Spec}(\mathbb{Z})$, $\mathbb{Z}$ tiene dim de Krull $= 1$, Cuerpo de funciones es $\mathbb{Q}$.

$\therefore \sum_{v \in \operatorname{Spec} \mathbb{Z}} \log|f|_v = 0$ ie $\underbrace{\sum_{i=1}^{n} -e_i \log(p_i)}_{\text{no arquimediano}} + \underbrace{\log|f|}_{\text{arquimediano}} = 0$

→ Funciones de Green : X = Sup. de Riemann compacta
$D \in \operatorname{Div}(X)$, $D = \sum_{p \in X} n_p [P]$. Una función de Green para D es

$g : X \setminus D \longrightarrow \mathbb{R}$ C^∞ y $\forall p \in |D|$, sea t = coord local centrada en P (ie $t(P) = 0$) se cumple :

$$g = -n_p \cdot \log|t| + \underset{O(1)}{b} \text{ , } b \text{ es continua en } p$$

Admisibilidad : Suponer género de $X \geq 1$.
 g

$H^0(X, \Omega^1) \supseteq \{\omega_1, \dots, \omega_g\}$ base ortonormal con prod. punto $(\omega_1, \omega_2) \mapsto \int_X \omega_1 \wedge \overline{\omega_2}$

Def.- $\mu_{Ar} := \frac{1}{g} \sum_{i=1}^{g} \omega_i \wedge \overline{\omega_i}$, $(1,1)$-forma canónica.

μ_{Ar} es $\mathcal{C}^\infty$ y positiva .

Hay operador d : $df = \frac{\partial f}{\partial z} dz$ $d^c f = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z}$.

$\therefore dd^c f = \underbrace{\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}}}_{\text{cte} \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}} f \, dz \wedge d\bar{z}$ $z = x + iy$

Si $D \in \mathrm{Div}(X)$ y g es una función de Green para D, diremos que es admisible si 2

$$dd^c g + \delta_D = \deg D \cdot \mu_{Ar} \quad , \quad \delta_D = \sum_{P \in |D|} n_p \delta_p .$$

Con δ_p una distribución, $\delta_p : \mathcal{C}^\infty(X) \longrightarrow \mathbb{R}$
$\alpha \longmapsto \alpha(P)$

y así $\underbrace{dd^c g + \delta_D}_{\text{funcional } \mathcal{C}^\infty(X) \to \mathbb{R} \text{ integrar!}}$ es igual a integrar $\deg D \cdot \mu_{Ar}$.

obs|: $dd^c \log|z| + \delta_0 = 0$ si $X = \mathbb{P}^1$. Es decir $\forall \alpha : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^\infty$ se tiene $\int \log|z| \, dd^c\alpha = \alpha(0)$. (Poincaré - Lelong).

→ Sea $f \in \mathbb{C}(X)$, entonces $dd^c \log|f| + \delta_{\mathrm{div} f} = 0$, $g(X) \geq 0$.

obs|: $U \subseteq \mathbb{C}$, U abierto, $\beta : U \to \mathbb{C}$ holomorfa, $\beta \neq 0$

$\Rightarrow \frac{1}{2} dd^c \log|\beta|^2 = 0$ $\qquad \frac{\partial}{\partial z \partial \bar{z}} \log \bar{\beta} = -i \frac{\partial}{\partial \bar{z} \partial z} \log \bar{\beta} = 0$

$\frac{1}{2} dd^c (\log \beta + \log \bar{\beta})$

Si $\beta = 0$ ∴ aplicar Poincaré - Lelong.

Ahora, como $\deg(\mathrm{div} f) = 0 \Rightarrow$ tenemos que $\log|f|$ es una función de Green admisible para $\mathrm{div} f$.

Teo: Dado D, siempre existe g f.G. admisibles. Si g_1, g_2 son f.G. admisibles para $D \Rightarrow \exists C \in \mathbb{R} : g_1 = g_2 + C$.

Idea de la unicidad: $dd^c(g_1 - g_2) = 0 \Rightarrow g_1 - g_2$ es $\mathcal{C}^\infty$ y armónica en compacto $\Rightarrow$ constante.

③

→ Superficie aritmética.

K = cuerpo de números

Def. $\mathcal{X} \xrightarrow{f} \operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$ morfismo de esquemas se dice superficie aritmética si

i) dim de Krull de $\mathcal{X} = 2$

ii) f de tipo finito, plano → (todas fibras son curvas)

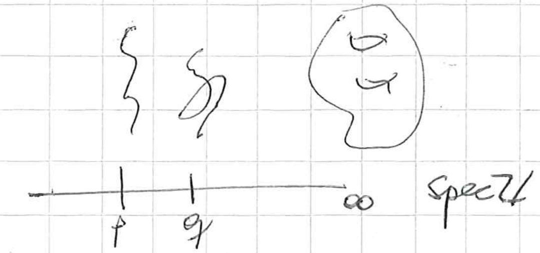
iii) proyectivo, regular.

Ej. $F(x,y) \in \mathbb{Z}[x,y]$ $\quad \mathcal{Y} = \operatorname{Spec}\left(\mathbb{Z}[x,y]/(F(x,y)) \right) \longrightarrow \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$

$\mathcal{X} = \operatorname{Proj}\left(\mathbb{Z}[x,y,z]/\overline{F} \right)$ $\quad \overline{F}$ = homogeneizado de F.

$\mathcal{X}(\mathbb{C}) = \bigcup_{\sigma: K \hookrightarrow \mathbb{C}} X_\sigma$, con X_σ Superficie de Riemann compacta.

$\sigma \rightsquigarrow F^\sigma = 0$ coef. cambian en $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightsquigarrow X_\sigma$.



Menores 3 : ①

→ Divisores compactificados : $\underbrace{\mathcal{X} \xrightarrow{h} \operatorname{Spec} \mathcal{O}_K}_{\text{Super. aritmética}}$, K = cuerpo de números

$\hat{D} = (D, g)$ es un divisor compactificado si
i) $D \in Div(\mathcal{X})$, divisor de Weil de codim 1
ii) g es una f. G. A. para $D(\mathbb{C}) \hookrightarrow \mathcal{X}(\mathbb{C})$.

Divisor principal: $f \in K(\mathcal{X})$, $\widehat{div\, f} := (div\, f, -\log|f|)$

operación : $\hat{D}_1 = (D_1, g_1)$, $\hat{D}_2 = (D_2, g_2)$, $\hat{D}_1 + \hat{D}_2 = (D_1 + D_2, g_1 + g_2)$.

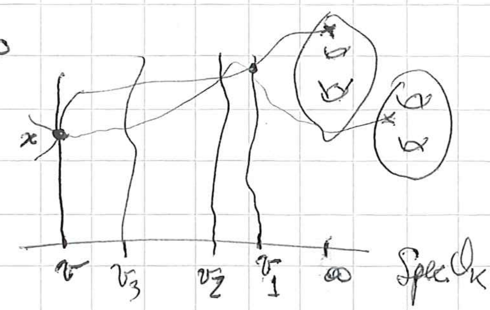
$\widehat{Div}(X)$ = Grupo de divisores compactificados
$\widehat{CH}^1(\mathcal{X}) := \widehat{Div}(\mathcal{X}) / \{\text{div. Princ.}\}$

Si $D \in Div(\mathcal{X})$ ⇝ $g_D :=$ f. G. A. para $D(\mathbb{C})$ que cumple $\int_{\mathcal{X}(\mathbb{C})} g_D \, \mu_{Ar} = 0$
∴ $CH(\mathcal{X}) \longrightarrow \widehat{CH}^1(\mathcal{X})$ morfismo de grupos 1-1
$D \mapsto (D, g_D)$

<u>Intersección</u> : $\hat{D}_1, \hat{D}_2 \in \widehat{CH}^1(\mathcal{X})$. Suponer que D_1, D_2 no tienen componentes irreducibles en común ($\Rightarrow |D_1(\mathbb{C})| \cap |D_2(\mathbb{C})| = \emptyset$)

$$\hat{D}_1 \cdot \hat{D}_2 := (D_1 . D_2)_{fin} + (g_1, g_2)_\infty$$

donde $(D_1, D_2)_{fin} = \sum_{\substack{v \in \Sigma_K \\ v \neq \infty}} (D_1, D_2)_v$



$(D_1, D_2)_v$: $x \in |D_1| \cap |D_2|$; $h(x) = v$

f_1 = ec. local para D_1 , f_2 = ec. local para D_2

∴ $(D_1, D_2)_v := \log\left(\# \mathcal{O}_{x,\mathcal{X}} / (f_1, f_2) \right) \in \mathbb{R}$ $= m \log p$, m = int. geom $\mathbb{F}_p$.

$$(g_1, g_2)_\infty := \sum_{p \in \mathcal{X}(\mathbb{C})} n_p \, g_2(p) \in \mathbb{R}$$

$$D_1(\mathbb{C}) = \sum_{p \in \mathcal{X}(\mathbb{C})} n_p [p]$$

se reduce a la formula $\Rightarrow$ del producto.

<u>Teorema</u>: i) $\widehat{\mathrm{div}}\, f \cdot \widehat{D} = 0$
$\forall f \in K(\mathcal{X})$, $\forall \widehat{D}$: D no tiene comp. en común con div. f.

ii) Se extiende a $\widehat{CH}^1(\mathcal{X})$ y $\widehat{D}_1, \widehat{D}_2 \in$ Ini, $\widehat{D}_1 \cdot \widehat{D}_2 = \widehat{D}_2 \cdot \widehat{D}_1$.
laplaciano autoadjunto.

Dualizante relativo: $h : \mathcal{X} \to \mathrm{Spec}\, \mathcal{O}_K$

$$\omega_{\mathcal{X}/\mathcal{O}_K} := \omega_{\mathcal{X}} \otimes \underbrace{h^*(\omega_{\mathcal{O}_K})^{-1}}_{\text{ligado al ideal discriminante}}$$

Para Spec $\mathbb{Z}$, $\omega_{\mathbb{Z}}$ es trivial

$$\widehat{\omega}_{\mathcal{X}/\mathcal{O}_K} := (\omega_{\mathcal{X}/\mathcal{O}_K}, g_{\omega_{\mathcal{X}/\mathcal{O}_K}}) \qquad \widehat{\omega}^2_{\mathcal{X}/\mathcal{O}_K} \in \mathbb{R}$$

Faltings: ≥ 0 Ullmo: > 0 si género fibra genérica es ≥ 2.

<u>Conj. de Parshin</u>:

$$\widehat{\omega}^2_{\mathcal{X}/\mathcal{O}_K} \leq 3 \sum_{v \in \Sigma_K} \delta_v \cdot \varepsilon_v + (2g-2) \log |D_{K/\mathbb{Q}}|$$

género fibra genérica; discriminante

Donde
$$\varepsilon_v = \begin{cases} \log \# k(v) & \text{si } v \text{ no es arquimediano} \\ 1 & \text{si } v \text{ es real} \\ 2 & \text{si } v \text{ es complejo} \end{cases}$$

$$\delta_v = \begin{cases} \# \text{ ptos singulares en la fibra } v & (v \text{ no arquimed}) \\ \underbrace{\text{invariante de Faltings}}_{\log \text{ "distancia" en } M_g \text{ al lugar de degeneración}} & v \text{ arquimediano} \end{cases}$$

$\mathcal{X} \to \mathrm{Spec}\, \mathcal{O}_K$ semiestable $g \geq 2$ $\qquad \delta \geq c(g)$ (Bost)

Parshin $\Rightarrow$ Szpiro.